Fizikas Komandu Olimpiāde 2021./22.

2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

11. un 12. klašu komplekts

Mūsu ģenerālsponsors

Mūsu sponsori

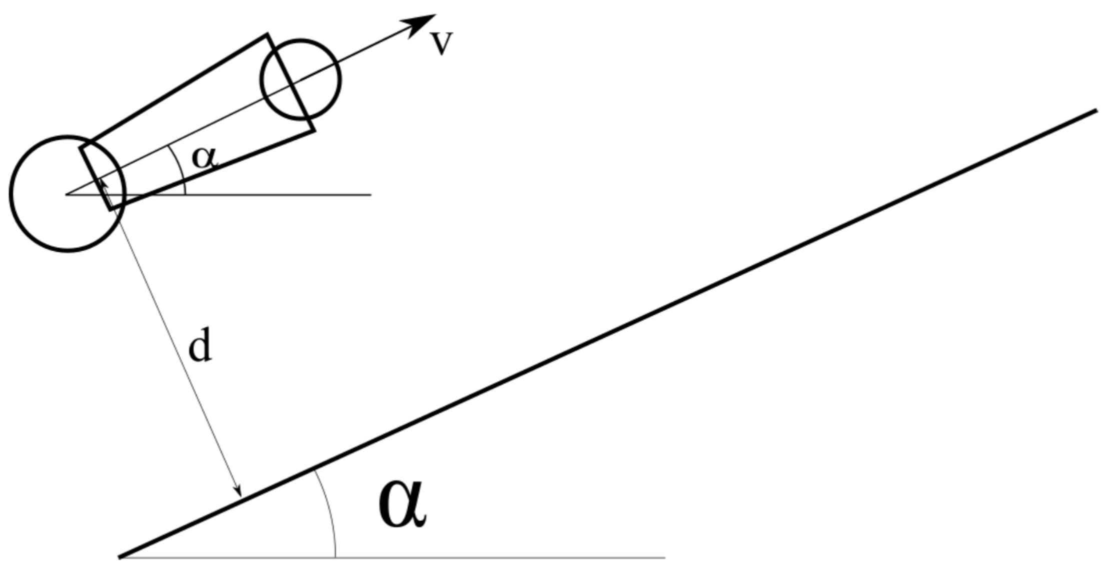
2022. g. 20. marts

Kartupeļu lielgabals 10 punkti

Jānis piemājas dārzā audzē īpašu kartupeļu šķirni. Jānis ir novērojis, ka, ja divi kartupeļi tiek pamesti gaisā, tad tie uzsprāgst brīdī, kad attālums starp tiem to lidojumā ir vismazākais (kartupeļi spēj paredzēt visu savu lidojuma trajektoriju).

Jānis nolēma izmantot šos īpašos kartupeļus kā munīciju brīvlaikā uzbūvētajam kartupeļu lielgabalam. Jānis novieto lielgabalu uz ceļa augstumā $\boldsymbol{d}$ pret ceļu tā, lai tas šautu kartupeļus paralēli ceļam, kurš ir leņķī $\boldsymbol{\alpha}$ pret horizontu. Jāņa lielgabals ir uzbūvēts tā, ka tas šauj ik pa 2 kartupeļiem, un otrais kartupelis tiek izšauts, kad pirmais kartupelis trāpa ceļam (lielgabala pārlāde un izšaušana ir automatizēta).

Ja abi kartupeļi tiek izšauti ar vienādu sākuma ātrumu $\boldsymbol{v_0}$, atrodi attiecību $v_0/\sqrt{gd}$, pie kuras tuvākais attālums starp kartupeļiem to uzsprāgšanas brīdī ir minimāls! Pieņem, ka kartupeļi ar ceļu saduras elastīgi, un sadursmes rezultātā nesašķīst (Jāņa kartupeļu šķirne ir ļoti izturīga).



Uzdevumā prasīts atrast ātrumu attiecību, pie kuras attālums starp kartupeļiem to uzsprāgšanas brīdī ir minimāls. Tā kā kartupeļi uzsprāgst, kad attālums starp tiem visas trajektorijas ietvaros būtu minimāls, varam secināt, ka šī attāluma mazākā iespējamā vērtība ir nulle (t.i. kartupeļi lidojumā saduras).

Šo uzdevumu visērtāk risināt, pārejot atskaites sistēmā, kas ir pagriezta par α grādiem attiecībā pret horizontu, proti, novietojot x asi gar ceļu un y asi perpendikulāri ceļam:

Šajā atskaites sistēmā paātrinājumam g ir divas komponentes - x ass virzienā tā ir $g_x = -g\sin\alpha$, bet y ass virzienā tā ir $g_y = -g\cos\alpha$. Lai gan pāreja uz pagrieztu atskaites sistēmu ir sarežģījusi kartupeļu trajektorijas analīzi, mēs esam ieguvuši, ka kustības x un y asu virzienos ir neatkarīgas, tāpēc varam apskatīt tās atsevišķi.

y ass virzienā kartupeļus apraksta labi pazīstamie brīvās krišanas vienādojumi, vienīgi brīvās krišanas paātrinājumu g tajos jāaizstāj ar brīvās krišanas paātrinājuma komponenti y ass virzienā, t.i. g_y. Attiecīgi varam iegūt kartupeļa krišanas laiku līdz zemei:

$$d = \frac{t_k^2}{2}(-g_y) = \frac{t_k^2}{2}g\cos\alpha$$

$$t_k = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\alpha}}$$

Šajā brīdī vērts apdomāt, kādām jābūt kartupeļu trajektorijām, lai attālums starp tiem kādā punktā būtu nulle. Ievērosim, ka kartupeļi pārvietojas pa vienu un to pašu trajektoriju, kur otrais kartupelis atpaliek no pirmā par laiku t_k. Ja sadalām trajektoriju 2 daļās ap punktu, kur kartupeļu horizontālais ātrums būtu nulle, un ievērojam, ka sadursmes brīdī viens kartupelis kustēsies $+x$ ass virzienā, bet otrs kustēsies $-x$ ass virzienā, tad varam izšķirt 2 gadījumus, kuros kartupeļi var sadurties:

- Ja abas augstāk minētās trajektorijas daļas nepārklājas, bet krustojas atsevišķos punktos.
- Ja abas augstāk minētās trajektorijas daļas pārklājas.

Varam ievērot, ka pirmais gadījums nav iespējams, ja kartupeļi tiek izšauti ar intervālu t_k. Tātad vienīgais veids, kā attālums starp kartupeļiem var būt 0, ir, ja kartupeļi $-x$ ass virzienā pārvietojas pa to pašu trajektoriju, pa kuru tie pārvietojās $+x$ ass virzienā. Līdz ar to varam secināt, ka kartupeļa ātrumam x ass virzienā jābūt 0 vai nu trajektorijas augstākajā punktā, vai arī brīdī, kad tas atsitas pret zemi. Šo varam ērti izteikt kā nosacījumu, ka kartupeļa ātrumam jānokrītas līdz nullei laikā $t = nt_k$ pēc izšaušanas, kur n ir naturāls skaitlis, jeb

$$\frac{v_0}{g_x} = \frac{v_0}{g\sin\alpha} = t = nt_k$$

$$\implies v_0 = nt_kg\sin\alpha = n\sqrt{2dg\sin\alpha\tan\alpha}$$

Tātad prasītā attiecība ir

$$\frac{v_0}{\sqrt{gd}} = n\sqrt{2\sin\alpha\tan\alpha}$$

kur n ir naturāls skaitlis.

Kosmiskā Lampa 14 punkti

Interesanti, ka, lai gan fotonam (gaismas daļiņai) nav masas, tam tomēr piemīt masai līdzīgas īpašības, piemēram, tam piemīt impulss $p = hf/c$, kur f - frekvence; c - gaismas ātrums; Planka konstante $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$ J s.

i) Satelīts, kura masa ir $m = 100$ kg, atrodas riņķveida orbītā ap Zemi augstumā $h = 400$ km. Lai paceltu tā orbītu, satelīts izšauj $N = 2 \cdot 10^{32}$ fotonus ar frekvenci $f = 100$ THz pretēji sava ātruma vektora virzienam. Nosaki ātruma izmaiņu ΔV. *2 punkti*

ii) Uzskicē satelīta kustības trajektoriju ap Zemi, norādot, kur tas atrodas sākuma brīdī un kur tas atradīsies, kad būs vistālāk no Zemes. *4 punkti*

iii) Kāds būs maksimālais attālums no Zemes, kas tiks sasniegts? Ja i) punktā neieguvi atbildi, pieņem, ka $\Delta V = 1$ km/s (atšķiras no iepriekš izrēķinātās vērtības). *6 punkti*

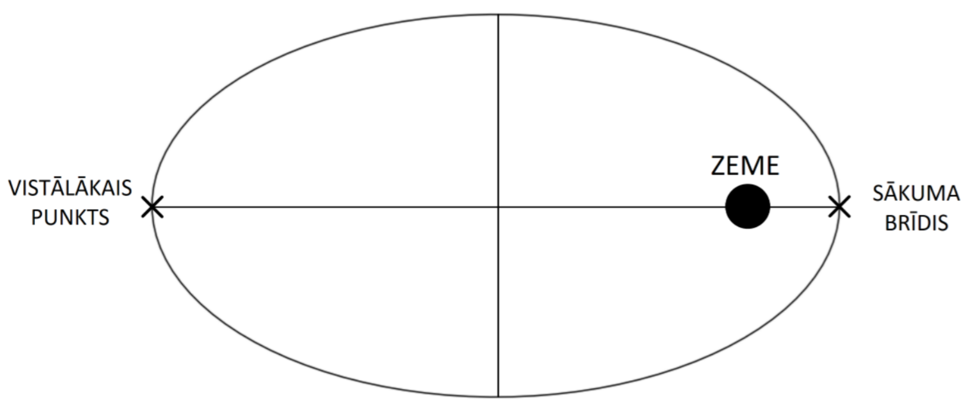
iv) Kāpēc i) punktā fotonus jāizšauj pretēji kustības virzienam, lai iegūtu vislielāko raķetes ātruma izmaiņu ΔV? *2 punkti*

i) No impulsa nezūdāmības likuma raķetei pirms un pēc fotonu izšaušanas seko

$$\Delta p = p_b - p_s = p_{fotonu}$$

$$\implies m\Delta V = N\frac{hf}{c}$$

$$\Delta V = \frac{\Delta p}{m} = \frac{Nhf}{mc} == \frac{2 \cdot 10^{32} \cdot 6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 100 \cdot 10^{12}}{100 \cdot 3.00 \cdot 10^{8}} \left[\frac{\text{J s s}^{-1}}{\text{kg m s}^{-1}}\right] \approx 442 \text{ m s}^{-1}$$



ii) Tā kā satelīta ātruma izmaiņa nav pietiekoša, lai tas izbēgtu no Zemes gravitācijas, tas paliks orbītā ap Zemi, turklāt mēs zinām, ka tādā gadījumā orbīta ir elipses formā. Pilnu punktu iegūšanai skicē vai tās anotācijā jānorāda

- Orbītas forma ir elipse
- Zeme atrodas elipses fokusā
- Satelīts sākuma brīdī atrodas punktā uz elipses, kas ir vistuvāk Zemei. Vistālākais punkts ir tieši pretī sākumpunktam.

Šos kritērijus apmierinātu, piemēram, augstāk redzamais zīmējums.

iii) Šo uzdevumu visvienkāršāk atrisināt, atceroties, ka orbītā esoša objekta pilnā enerģija ir

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

kur a ir elipses pusass garums. Tad, izmantojot elipses īpašības, beigu attālums izsakāms kā

$$r_b = 2a - R$$

Ja šī formula nav zināma, tad jāizmanto enerģijas nezūdāmības likums un leņķiskā impulsa saglabāšanās likums sākuma (tuvākajā) un beigu (tālākajā) punktā:

$$E = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{GMm}{r_b}$$
$$L = mv_sR = mv_br_b$$

šeit $v_s = v_0 + \Delta V$, kā arī

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

ir raķetes sākuma ātrums (pirms fotonu izšaušanas). Attiecīgi no leņķiskā impulsa saglabāšanās

$$r_b = \frac{v_sR}{v_b}$$

šo ievietojot enerģijas nezūdāmības likumā, iegūstam kvadrātvienādojumu priekš v_b:

$$v_b^2 - \frac{2GM}{v_sR}v_b - \frac{2E}{m} = 0$$

Šo atrisinot iegūstam saknes

$$v_b = \frac{GM}{v_sR} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{v_sR}\right)^2 + \frac{2E}{m}} = \frac{GM}{v_sR} \pm \frac{v_s^2R - GM}{v_sR}$$

No šiem mūs interesē atrisinājums ar mīnus zīmi (otrs atrisinājums atbilst sākumpunktam):

$$v_b = \frac{2GM - v_s^2R}{v_sR} = \frac{2\frac{GM}{R} - v_s^2}{v_s}$$

Ievietojot šo iepriekš iegūtajai izteiksmei priekš beigu attāluma r_b, iegūstam

$$r_b = \frac{v_s R}{v_b} = \frac{v_s^2 R}{2\frac{GM}{R} - v_s^2} = \frac{(\sqrt{\frac{GM}{R}} + \Delta V)^2}{2\frac{GM}{R} - (\sqrt{\frac{GM}{R}} + \Delta V)^2} R$$

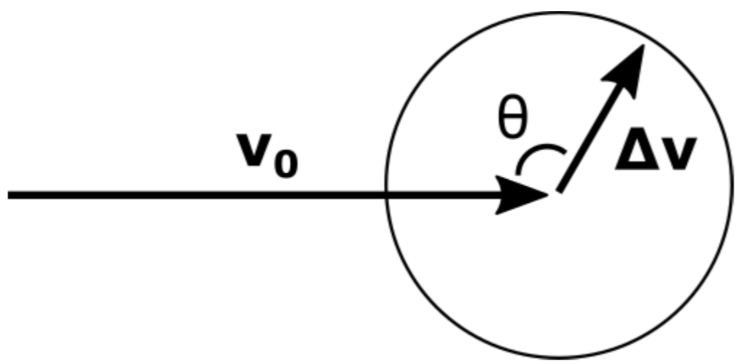
Svarīgi, ka sākuma orbītas augstums virs Zemes centra ir $R = R_Z + h$, kur R_Z ir zemes rādiuss un h ir satelīta augstums virs Zemes. Šeit lietderīgi aprēķināt starprezultātu

$$\frac{GM}{R} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}}{(6371 + 400) \cdot 10^3} \text{ J kg}^{-1} \approx 5.886 \cdot 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Izmantojot $\Delta V = 442$ m s^{-1} no (i) punkta, iegūstam, ka

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{(\sqrt{5.886 \cdot 10^7} + 442)^2}{2 \cdot 5.886 \cdot 10^7 - (\sqrt{5.886 \cdot 10^7} + 442)^2} \cdot (6371 + 400) \cdot 10^3 \text{ m} \\ &= 1.269 \cdot 6771 \cdot 10^3 \text{ m} \\ &= 8.59 \cdot 10^6 \text{ m} \end{aligned}$$

iv) Ievērosim, ka uzdevumā prasīts par skalārā ātruma izmaiņu. Šeit ir lietderīgi uzzīmēt, kā var izvietoties sākotnējais ātruma vektors $\mathbf{v_0}$ un ātruma izmaiņas vektors $\mathbf{\Delta v}$, kas rodas no fotonu izšaušanas. Svarīgi ievērot, ka $\mathbf{\Delta v}$ lielums ir pirmajā punktā aprēķinātais, bet tā virziens ir pretējs fotonu izšaušanas virzienam.



Skaidrs, ka fotonus var izšaut jebkurā virzienā, tātad vektors $\mathbf{\Delta v}$ veido riņķa līniju ar centru vektora $\mathbf{v_0}$ galā. Raķetes beigu ātrums ir

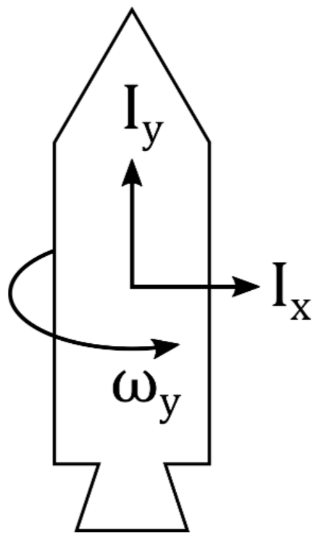
$$v^2 = |\mathbf{v_0} + \mathbf{\Delta v}| = |\mathbf{v_0}|^2 + |\mathbf{\Delta v}|^2 - 2|\mathbf{v_0}||\mathbf{\Delta v}| \cos\theta$$

Tā kā $|\mathbf{v_0}|$ un $|\mathbf{\Delta v}|$ ir konstantes, tad mums jāizvēlas tāds θ, lai v būtu pēc iespējas lielāks, t.i. lai $\cos\theta$ būtu minimāls. Šo apmierina $\theta = 180°$, jeb $\mathbf{\Delta v} \parallel \mathbf{v_0}$. Šis ir gadījums, kad fotoni tiek izšauti pretēji raķetes kustības virzienam.

Karuselis 8 punkti

Aplūkosim raķeti, kuras inerces moments ap tās simetrijas asi ir $I_y = 3000$ kg m^2, savukārt perpendikulāri simetrijas asij tās inerces moments ir $I_x = 12000$ kg m^2. Raķete ir veiksmīgi palaista un nonākusi orbītā, turklāt tās degvielas tvertnē ir palikusi nedaudz degviela šķidrā stāvoklī, kas ar viskozitātes spēkiem iedarbojas uz raķeti.

Pēc ilga laika raķetes enerģija sasniedz kādu minimālu vērtību. Ja raķete orbītā ieiet ar sākotnējo leņķisko ātrumu $\omega_y = 10$ rad s^{-1}, kāds būs raķetes leņķiskais ātrums pēc ilga laika?



Vienīgais ārējais spēks, kas iedarbojas uz raķeti, ir gravitācija, tomēr arī šis spēks pazūd raķetes atskaites sistēmā. Tādējādi varam secināt, ka raķetes leņķiskais impulss saglabājas tās tālākajā kustībā.

Viskozitātes spēki šajā gadījumā pārvērš raķetes rotācijas enerģiju siltumā, tāpēc tās mehāniskā enerģija nesaglabāsies un tieksies sasniegt minimālu vērtību. Šī vērtība nevar būt 0, jo vienlaicīgi jāizpildās arī leņķiskā impulsa nezūdāmības likumam. Lai labāk saprastu, kā varētu izskatīties raķetes beigu stāvoklis, izteiksim tās kinētisko enerģiju caur leņķisko impulsu L:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

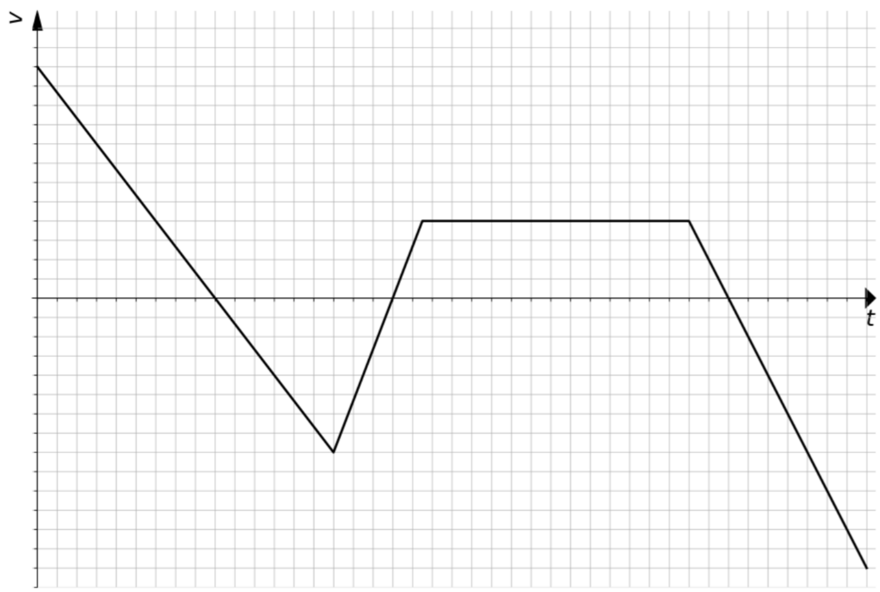
Iepriekš ievērojām, ka raķetes leņķiskais impulss ir konstants, tāpēc vienīgais mainīgais šajā vienādojumā ir tās inerces moments I, ko nosaka raķetes rotācijas ass. Viskozitātes spēkiem pārvēršot kinētisko enerģiju siltumā, raķete tiecas rotēt ap asi, kurai ir lielāks inerces moments I. Tādējādi beigu stāvoklī, kad kinētiskā enerģija būs vismazākā, raķete rotēs ap asi ar vislielāko inerces momentu. Dotajai raķetei vislielākais inerces moments $I_x = 12000$ kg m^2 ir ap asīm, kas perpendikulāras y asij. Tādējādi no leņķiskā impulsa nezūdāmības iegūstam, ka

$$L_{\text{beigu}} = I_x\omega = L_{\text{sākuma}} = I_y\omega_y$$
$$\implies \omega = \frac{I_y\omega_y}{I_x} = \frac{3000}{12000} \cdot 10 \text{ rad s}^{-1} = 2.5 \text{ rad s}^{-1}$$

Satelīta pārvadāšana 10 punkti

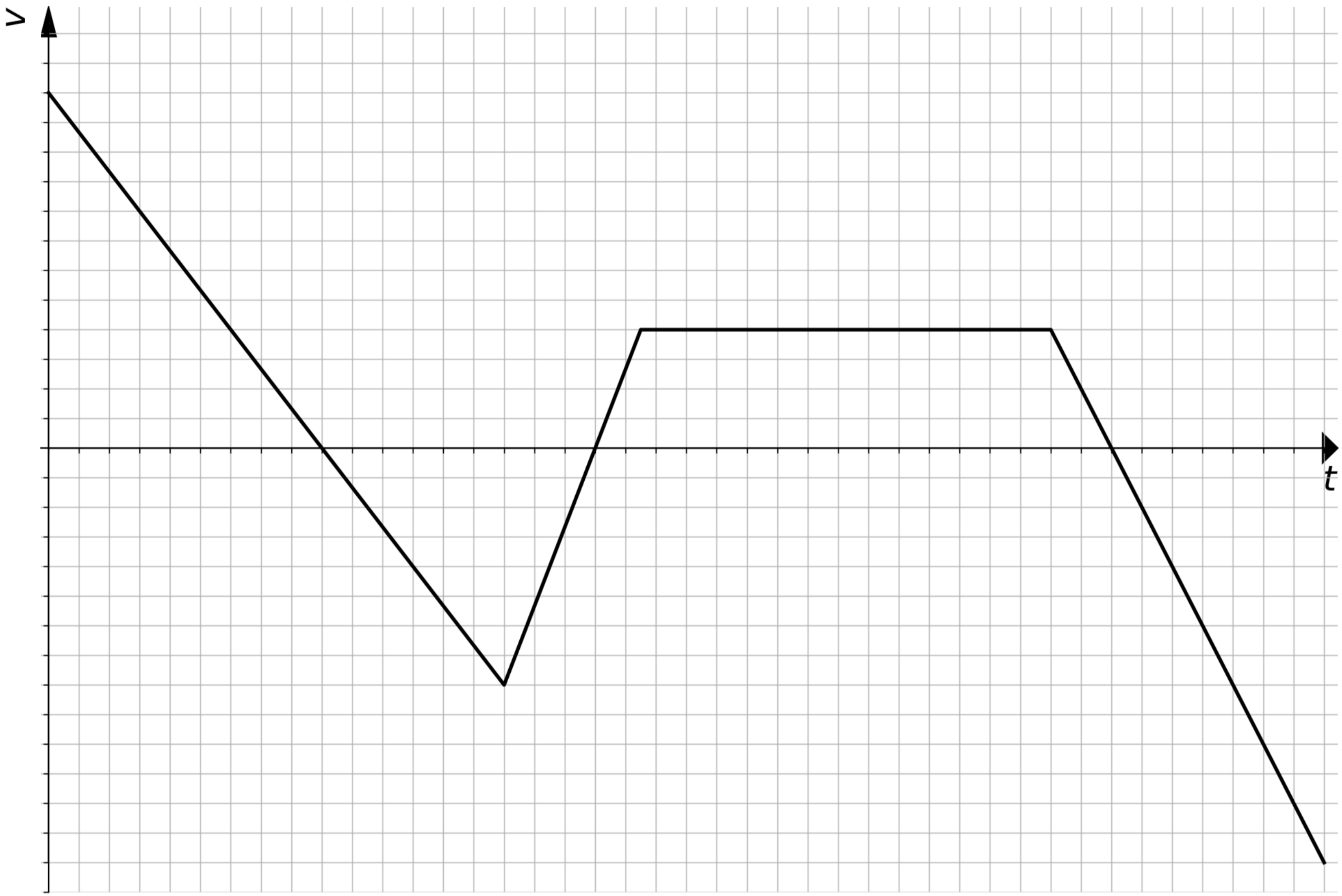
i) a) Divas mašīnas ved satelīta daļas no punkta A uz punktu B. Pirmā mašīna brauc ar konstantu ātrumu, otrā ar laikā mainīgu ātrumu. Sekojošajā grafikā (nākamajā lapā dots palielināts grafiks) attēlota pirmās mašīnas ātruma atkarība no laika otrās mašīnas atskaites sistēmā. Uzzīmē otrās mašīnas ātruma grafiku pirmās mašīnas atskaites sistēmā. *2 punkti*

Piezīme: otru grafiku zīmē kopā ar jau doto - vai nu uz palielinātā attēla nākamajā lapā, vai arī pārzīmējot grafiku uz rūtiņu papīra.



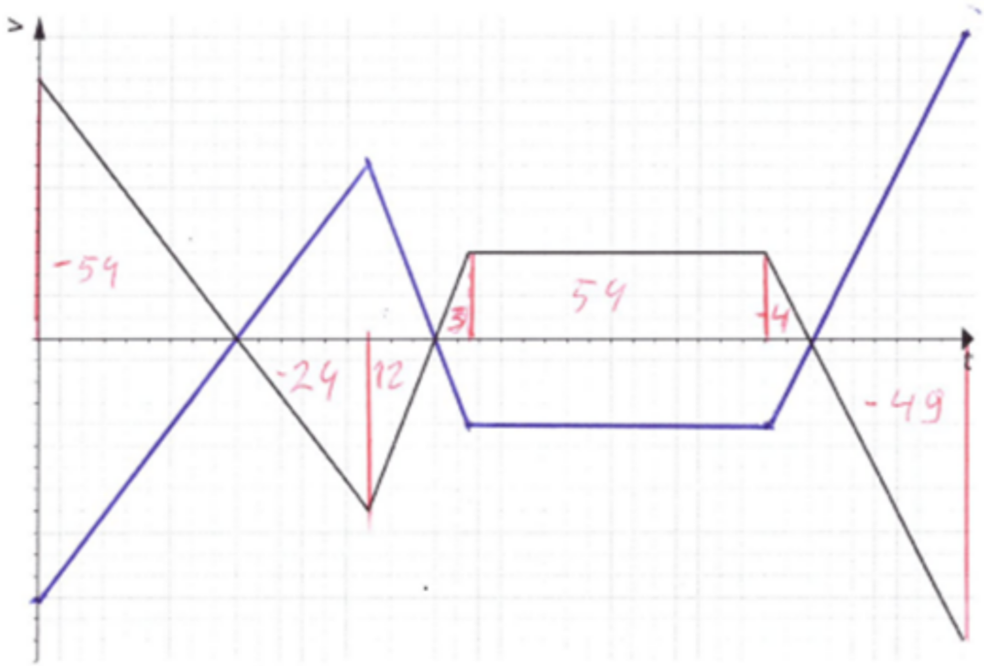
i) b) Otrā mašīna no punkta A izbrauca laikā $t_0 = 1$ min pēc pirmās. Zināms, ka tā pirmo mašīnu panāca, braucot laiku $t_1 = 9$ min, kā arī abas mašīnas punktā B nonāca vienā laikā. Lielākais attālums starp abām mašīnām bija $d = 1.960$ km. Nosaki pirmās mašīnas ātrumu, v_1, otrās mašīnas maksimālo ātrumu, $v_{2,max}$ un attālumu starp punktiem A un B, D_{AB}. *6 punkti*

ii) Ceļu no B uz C veic trešā mašīna. Zināms, ka pusi ceļa tā brauc ar ātrumu v_1, trešdaļu ceļa brauc ar ātrumu $v_{2,max}$ un pārējo ceļu veic ar ātrumu v_3. Aprēķini trešās mašīnas vidējo ātrumu. *2 punkti*


v
t

i) A) Dots ir pirmās mašīnas grafiks otrās mašīnas atskaites sistēmā. Ir zināms, ka pirmā mašīna brauc ar konstantu ātrumu un otrā mašīna izbrauca t=1 minūti pēc pirmās mašīnas. No šejienes secinām, ka grafika sākuma punkts atbilst laika momentam, kad kustību uzsāka otrā mašīna. Ja laika grafiks sāktos laika momentā, kad kustību uzsāka pirmā mašīna, tad 1 minūti grafiks uzrādītu nemainīgu ātrumu un mēs varētu nolasīt laika skalas mērogu.

Sākot no laika momenta kad kustību uzsāka otrā mašīna ātruma grafiks izskatās simetrisks, tikai ar pretējo zīmes vērtību Skat Zīm 1. Ātruma grafiku laikā pirms kustību uzsāka otrā mašīna mēs apskatīsim uzdevuma risinājuma beigās.



B) Uzdevuma teksts nesatur vairākus fizikālos lielumus kas būtu vajadzīgi uzdevuma risināšanai un tie mums ir jānolasa no grafika. Diemžēl grafiks nesatur laika un ātruma mērogu, kāpēc fizikālo lielumu nolasīšana tiešā veidā nav iespējama. Atcerēsimies ka laukums zem ātruma grafika v(t) raksturo veikto attālumu s(t). Tādējādi mēs varam uzzīmēt attāluma grafiku x(t) kāds laikā ir starp abām mašīnām. Šo grafiku var uzzīmēt mērogā vadoties no laukuma kuru ierobežo ātruma grafiks un x ass. Skat sarkano grafiku zīmējumā 2:

Uzdevuma nosacījumi nosaka, ka grafika beigās abas mašīnas galapunktā ierodas vienlaicīgi. Tas nozīmē ka grafika beigās mēs zinām, ka attālums starp mašīnām ir 0 un tagad mēs varam novilkt horizontālo asi, kas atbilst x=0 līmenim. Tas ir sākuma nosacījums, bez kura mēs nevarējām veikt tālākos aprēķinus. No grafika ir redzams, ka punktā kurš atzīmēts ar vērtību 79 attālums starp mašīnām ir vislielākais un atbilstoši uzdevuma nosacījumiem tas ir 1,96 km u mūsu grafika mērogā tas atbilst 4,9 rūtiņām. No šejienes 1 rūtiņa uz vertikālās (sarkanās) Attāluma ass atbilst 0,4 km/rūtiņā.

No Sarkanā grafika mēs redzam ka pirmo reizi abas mašīnas satiksies laika momentā kas atbilst 3 rūtiņām. Pēc uzdevuma nosacījumiem abas mašīnas satiksies 9 minūtes pēc tam kad kustību uzsāka otrā mašīna un no šejienes secinām, ka mūsu laika skalā 1 rūtiņa atbilst 3 minūtēm

Lai noteiktu ātruma mērogu grafikā (Y ass virziens melnajam grafikam) apskatīsim posmu kad ātruma starpība starp abām mašīnām nemainījās, respektīvi abas mašīnas brauca vienmērīgi. Šis posms atbilst 13,5 rūtiņām laika skalas virzien x3min/rūtiņā=40,5 minūtes. Savukārt no sarkanā grafika šajā intervālā mēs varam nolasīt attāluma izmaiņas, kas atbilst (7,5-2,1)=5,4 rūtiņām. Reizinot ar iepriekš noskaidroto mērogu 0,4 km/rūtiņā iegūstam 5,4x0 4=2,16 km. Tagad varam izrēķināt ātrumu starp mašīnām šajā intervālā v=s/t=2,16/40,5*60minūtes=3,2 km/stundā un tas atbilst 4 rūtiņām ātruma grafikā. No šejienes varam noteikt, ka ātruma grafikā 1 rūtiņa atbilst 0,8 km/stundā lielam ātrumam.

Tagad esam noskaidrojuši ātruma un attāluma grafiku mērogus un varam no tiem nolasīt vērtības, kas nepieciešamas uzdevuma aprēķinam.

Iezīmēsim grafikā laika momentu kad kustību uzsāka pirmā mašīna, kas ir 1 minūti pirms otrās mašīnas. Šajā laika intervālā kustējās tikai pirmā mašīna, un tā veica attālumu kas atbilst 3 rūtiņām=¿ 3*0,4km/rūtiņā= 1,2 km. Tagad varam izrēķināt pirmās mašīnas ātrumu V1. Pirmās mašīnas ātrums V1= 1,2km/minūtē = 72 km/stundā No laika grafika var nolasīt laiku ko pirmā mašīna pavadīja ceļā. Tas būtu 42,333 rūtiņasx3minūtes=127minūtes. Tagad varam noteikt kopējo attālumu. Kopējais attālums AB=127*1,2=152,4 km. Otrās mašīnas ātrums vislielākais būs laika momentā, kad pirmajai mašīnai būs pozitīvs ātrums attiecībā pret otro mašīnu un tam būs vislielākā vērtība. No grafika redzams ka tas atbilst laika momentam, kar otrā mašīna uzsāk kustību. No grafika nolasām ka ātrumu starpība ir 12 rūtiņas, kas atbilst 12*0,8=9,6 lm/stundā un pie šīs ātrumu starpības vēl ir jāpieskaita pirmās mašīnas ātrums. Otrās mašīnas maksimālais ātrums=9,6+72=81,6 km/stundā

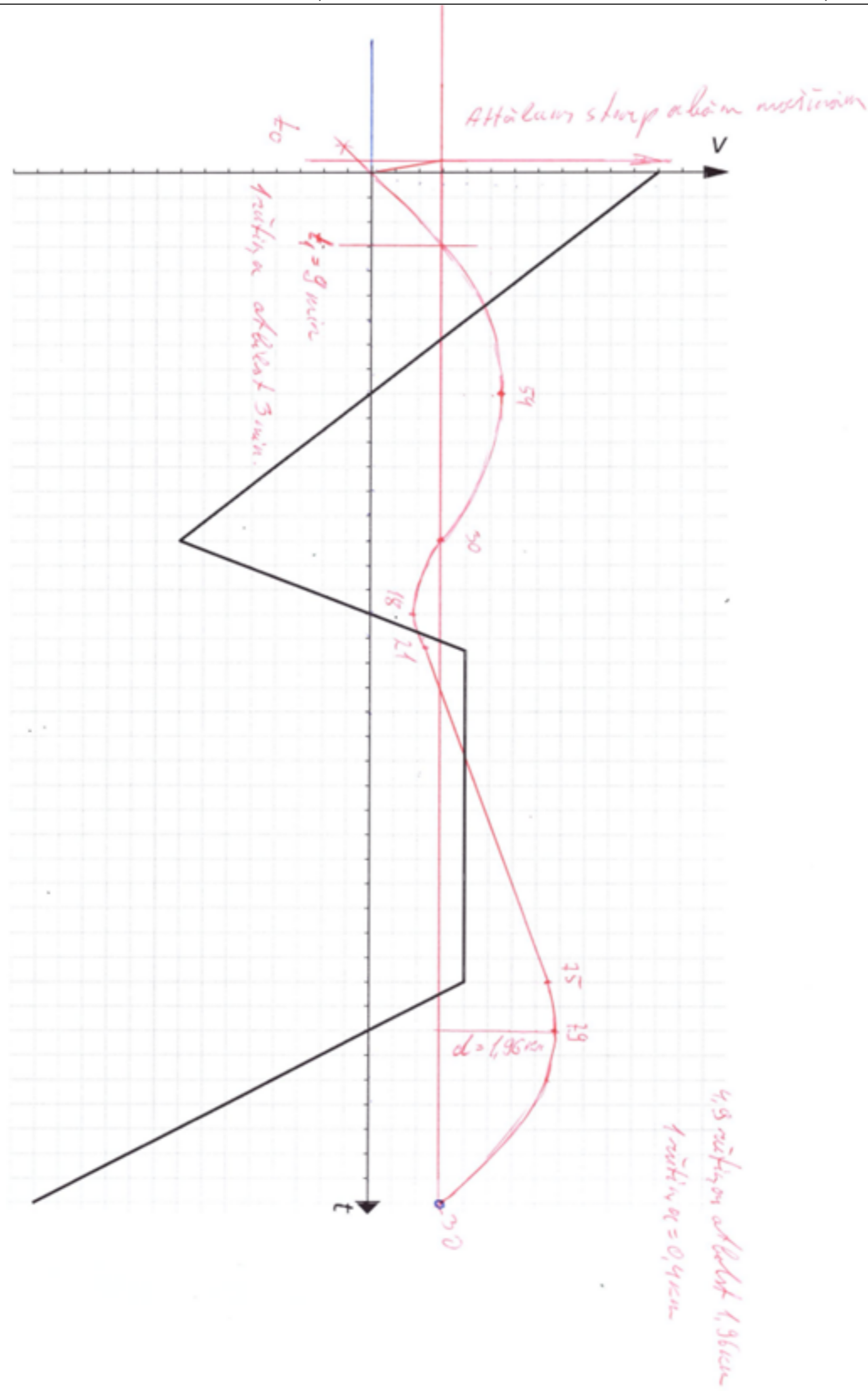
Tagad varam atgriezties pie uzdevuma i sadaļas un apskatīties kā zīmējumā izskatītos mašīnu savstarpējais ātrums laika intervālā kad pirmā mašīna jau kustējās, bet otrā vēl nē. V=1,2 km/minūtē ātruma skalā atbilst 72/0,8=+90 rūtiņas. Skaidrs ka esošajā mērogā uz papīra lpp atlikt 90 rūtiņu iezīmi nav iespējams, tāpēc par pareizu atbildi tiks uzskatīts arī tikai aprēķins un paskaidrojums.

ii) Pusi ceļa 1/2 l mašīna brauks ar ātrumu v_1, 1/3 l ceļa mašīna brauks ar ātrumu v_2 un atlikušo 1/6 l mašīna brauks ar ātrumu v_3. Kopējais laiks t

$$t = \frac{l}{2v_1} + \frac{l}{3v_2} + \frac{l}{6v_3}$$

$$v_{vid} = l/t = \frac{l}{\frac{l}{2v_1} + \frac{l}{3v_2} + \frac{l}{6v_3}} = \frac{1}{\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{3v_2} + \frac{1}{6v_3}}$$

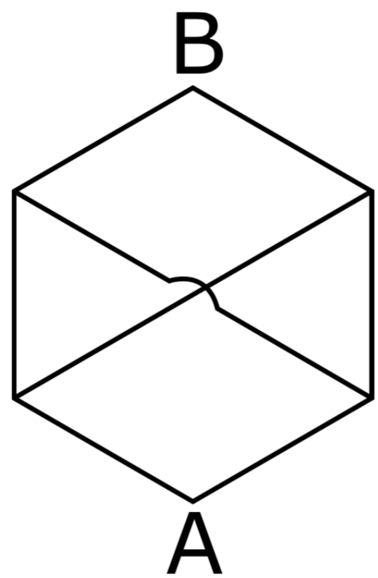
cm



Simetriski slēgumi 12 punkti

Parasti uzdevumos ar slēgumiem sāk ar slēguma pretestības aprēķināšanu, pēc tam to pielietojot strāvas vai sprieguma atrašanai. Šajā uzdevumā apskatīsim, kā rīkoties pretējā virzienā, lai atrastu pretestību, ja tiek fiksēta noteiktos kontaktos ievadītā un izvadītā strāva.

Aplūkosim situāciju, kad no vadiem izveidots sešstūris:



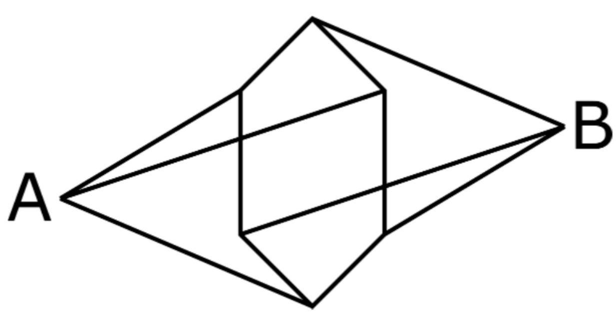
Visām sešstūra malām kā arī tā divām novilktajām diagonālēm ir pretestība r. Sešstūra diagonāles krustošanas punktā nesaskaras.

i) Virsotnē A tiek ievadīta strāva I, bet no katras no pārējām sešstūra virsotnēm tiek izvadīta strāva $I/5$. Kāds ir spriegums starp virsotnēm A un B? *2 punkti*

ii) No virsotnes B tiek izvadīta strāva I, bet katrā no pārējām sešstūra virsotnēm tiek ievadīta strāva $I/5$. Kāds ir spriegums starp virsotnēm A un B? *1 punkti*

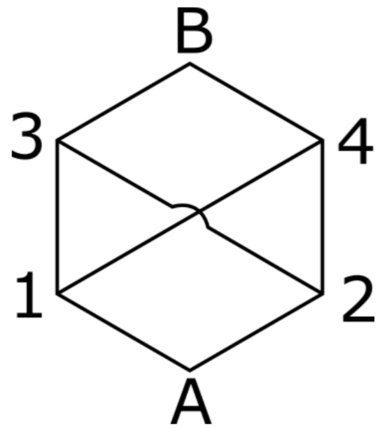
iii) Kāda ir pretestība slēgumam starp virsotnēm A un B? (Ieteikums: kā izskatās gadījumu i un ii superpozīcija?) *3 punkti*

iv) No vadiem izveidota sekojoša figūra (vadi saskaras tikai sešstūra virsotnēs un punktos A un B):



Visu 12 vadu pretestība ir r. Kāda ir pretestība slēgumam starp punktiem A un B? *6 punkti*

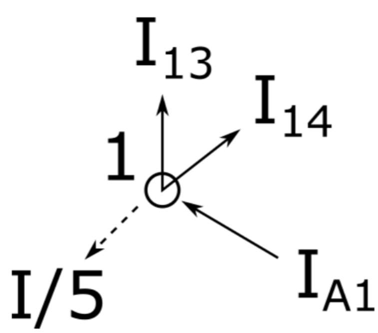
i) Apzīmēsim sešstūra virsotnes ar A, B, 1, 2, 3, 4, kā redzams attēlā:



Šajā sistēmā aprēķinus ievērojami atvieglo slēguma simetrija - skaidrs, ka virsotnes 1 un 2 būs vienādā spriegumā attiecībā pret virsotni A, tāpat virsotnes 3 un 4 būs vienādā spriegumā. Tādējādi secinām, ka strāvas I_{A1} un I_{A2}, kas plūst uz attiecīgi virsotnēm 1 un 2, būs vienādas:

$$I_{A1} = I_{A2} = \frac{I}{2}$$

Apskatīsim tuvāk virsotni 1:



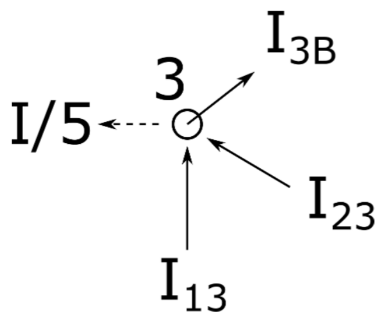
Virsotnē ieplūst strāva I_{A1}, bet no tās izplūst strāvas I_{13} un I_{14}, kā arī strāva $I/5$, kas tiek izvadīta ārā no slēguma. Zinām, ka visai virsotnē ieplūstošajai strāvai no tās arī jāizplūst (Kirhofa strāvas likums), tātad

$$I_{A1} = \frac{I}{5} + I_{13} + I_{14}$$

bet mēs zinām, ka $I_{A1} = I/2$, kā arī, ka virsotnes 3 un 4 ir vienādā spriegumā, t.i. uz tām plūstošās strāvas būs vienādas: $I_{13} = I_{14} = I'$. Tādējādi iegūstam, ka

$$I_{13} = I_{14} = I' = \frac{1}{2}\left(I_{A1} - \frac{I}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{2} - \frac{I}{5}\right) = \frac{3}{20}I$$

Līdzīgi varam aplūkot, piemēram, 3. virsotni:



Zinām, ka virsotnei 2 ir tāds pats spriegums kā virsotnei 1, tātad strāva $I_{23} = I_{13} = 3I/20$. Atkal izmantojot Kirhofa strāvas likumu, varam iegūt strāvu I_{3B}:

$$I_{13} + I_{23} = I_{3B} + \frac{I}{5}$$

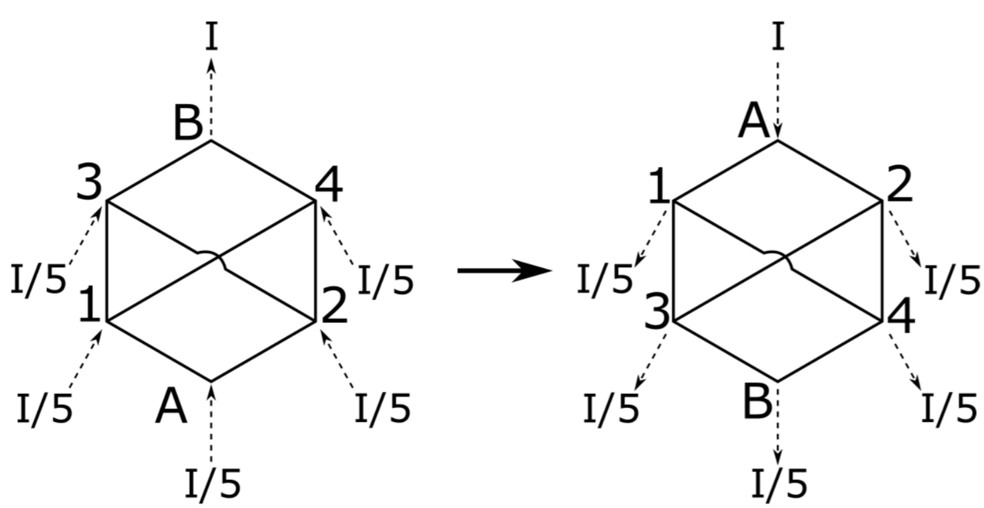
$$I_{3B} = I_{13} + I_{23} - \frac{I}{5} = \frac{3}{10}I - \frac{1}{5}I = \frac{I}{10}$$

Skaidrs, ka mēs līdzīgi varētu aplūkot arī virsotnes 2 un 4, tomēr tas nav nepieciešams - esam atraduši strāvas posmos, kas savieno virsotni A un virsotni B, tātad jau šajā brīdī varam iegūt spriegumu starp abām virsotnēm:

$$V_i = V_{AB} = V_{A1} + V_{13} + V_{3B} = (I_{A1} + I_{13} + I_{3B})\,r = \left(\frac{I}{2} + \frac{3I}{20} + \frac{I}{10}\right) r = \frac{15}{20}Ir = \frac{3}{4}Ir$$

ii) Ievērosim, ka šis gadījums tieši atbilst iepriekšējam, ja veicam sekojošas darbības:

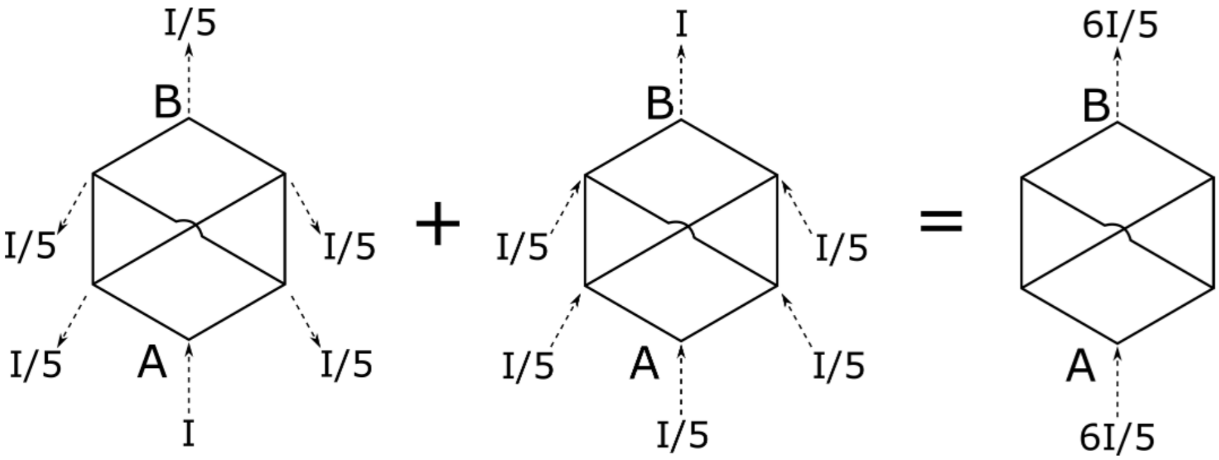
1. pa pāriem pārsaucam virsotnes A $\leftrightarrow$ B, 1 $\leftrightarrow$ 3, 2 $\leftrightarrow$ 4
2. apgriežam visas strāvas pretēji:



Bet šādu situāciju mēs jau apskatījām i) punktā, kur ieguvām, ka $V_{AB} = \frac{3}{4}Ir$. Tā kā esam pārsaukuši virsotnes, mūs patiesībā interesē spriegums $V_{BA} = -\frac{3}{4}Ir$, tomēr jāievēro, ka sākotnējā situācijā arī strāvu virzieni ir pretēji. Tātad patiesais spriegums starp virsotnēm A un B ir

$$V_{ii} = -V_{BA} = \frac{3}{4}Ir$$

iii) Visvieglāk šo punktu risināt, ja ievērojam, ka i) un ii) gadījuma superpozīcija ir slēgums, kur virsotnē A tiek ievadīta strāva $6I/5$, kā arī no virsotnes B tiek izvadīta tāda pati strāva $6I/5$:



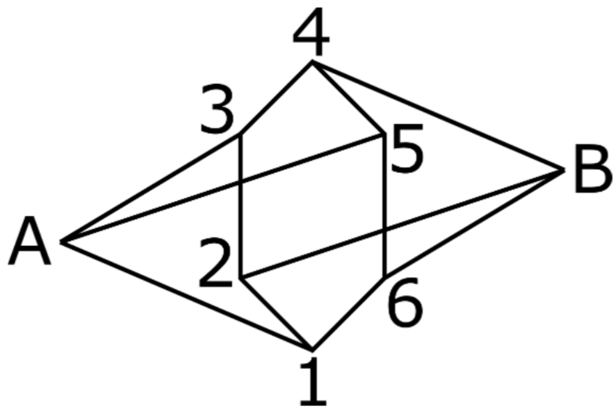
Apvienojot i) un ii) punktā iegūtos rezultātus, iegūstam, ka spriegums starp virsotnēm A un B ir

$$V_{AB} = V_i + V_{ii} = \frac{3}{2}Ir$$

Varam ievērot arī, ka starp šīm virsotnēm caur slēgumu plūst strāva $6I/5$. Attiecīgi slēguma pretestība ir

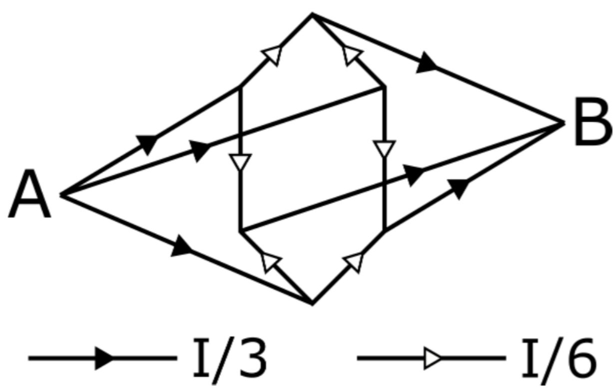
$$R = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} = \frac{3Ir}{2} \cdot \frac{5}{6I} = \frac{5}{4}r$$

iv) Šo punktu iespējams risināt, sekojot i)-iii) punktu paraugam. Alternatīvi varam izmantot sistēmas simetriju lai vienā solī iegūtu spriegumu starp A un B, ja starp tiem plūst strāva I. Apzīmēsim sešstūra virsotnes ar cipariem 1-6:



Ievērosim, ka virsotnes 1, 3 un 5 atrodas simetriskās pozīcijās pret punktu A, tātad punktā A ievadīta strāva I sadalīsies vienmērīgi starp vadiem A1, A3, A5 jeb $I_{A1} = I_{A3} = I_{A5} = I/3$. Izmantojot sešstūra simetriju, varam secināt, ka $I_{12} = I_{16} = I_{32} = I_{34} = I_{54} = I_{56} = I/6$. Attiecīgi secinām, ka $I_{2B} = I_{4B} = I_{6B} = I/3$, ko mēs būtu varējuši iegūt arī, ievērojot, ka, līdzīgi kā virsotnes 1, 3 un 5 ir simetriskas pret A, virsotnes 2, 4 un 6 ir simetriskas pret punktu B.

Attiecīgi iegūstam sekojošo strāvu plūsmas shēmu:



Atceroties, ka katra vada pretestība ir r, varam patvaļīgi izvēlēties vadu virkni, kas savieno punktus A un B, lai atrastu spriegumu V_{AB}. Piemēram, ja izvēlamies virkni A-1-2-B:

$$V_{AB} = V_{A1} + V_{12} + V_{2B} = (I_{A1} + I_{12} + I_{2B})r = \left(\frac{I}{3} + \frac{I}{6} + \frac{I}{3}\right) r = \frac{5}{6} Ir$$

Tā kā starp A un B plūst strāva I, iegūstam, ka pretestība slēgumam starp punktiem A un B ir

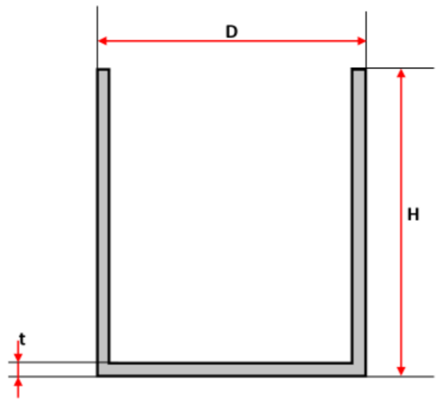
$$R = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{5}{6} r$$

Pelmeņu katls 11 punkti

Alberts nesen sāka studijas un pārvācās uz studentu kopmītni. Diemžēl kopmītnē nav tējkannas, un vienīgie trauki, kas kopmītnē ir pieejami, ir liels metāla katls un maza metāla krūze. Alberts nolēma sev uztaisīt pelmeņus katlā un tēju krūzē, uzliekot lielo katlu uz plīts, bet mazo krūzi ar tēju ievietojot lielajā katlā.

Vienkāršības labad var pieņemt, ka abos traukos ir tīrs ūdens ar nemainīgu blīvumu $\rho_u = 1\,\mathrm{g/cm^3}$. Abi trauki ir veidoti no dzelzs, kura blīvums $\rho_{dz} = 7.85\,\mathrm{g/cm^3}$. Katliņa izmēri un tilpums ir daudz lielāki nekā krūzītei. Krūzīte atrodas tālu no katla sieniņām un peld katlā esošajā ūdenī. Termiskās izplešanās efektus var neņemt vērā. Pieņemt, ka krūze paliek vertikālā stāvoklī.

Krūzīti var aproksimēt kā dobu cilindru. Cilindra dimensijas ir dotas zīmējumā, ārējais diametrs $D = 12\,\mathrm{cm}$, augstums $H = 16\,\mathrm{cm}$, sieniņu biezums $t = 3\,\mathrm{mm}$. Būdams inženierijas students, Alberts aizdomājās par sakarībām starp ūdens līmeņiem lielajā katlā un krūzē.



i) Kurš no dotajiem apgalvojumiem ir patiess? *1.5 punkti*

1. Ūdens līmenis krūzē būs vienāds ar ūdens līmeni katlā
2. Ūdens līmenis krūzē būs augstāks par ūdens līmeni katlā
3. Ūdens līmenis katlā būs augstāks par ūdens līmeni krūzē
4. Nevar noteikt no dotās informācijas

ii) Kāds ir maksimālais ūdens tilpums, ko var ieliet krūzē, pirms tā nogrims un Alberts sabojā savas vakariņas? *2 punkti*

iii) Vai eksistē tāda krūze, kuru šādā situācijā varēs piepildīt pilnu līdz malām, tai nenogrimstot? Ja atbilde ir jā, tad kādiem nosacījumiem jāizpildās. *2 punkti*

Ticis galā ar ūdens daudzumiem, Alberts ķērās klāt pie pelmeņu vārīšanas. Katls tiek uzlikts uz plīts un sākts sildīt, līdz ūdens lielajā katlā sāk vārīties.

iv) Kurš no šiem apgalvojumiem ir patiess? Kāpēc? *3.5 punkti*

1. Ūdens krūzē sāks vārīties pirms ūdens lielajā katlā
2. Ūdens krūzē sāks vārīties pēc ūdens lielajā katlā
3. Ūdens krūzē nesāks vārīties
4. Nevar noteikt no dotās informācijas

v) Kāda būs ūdens temperatūra krūzē pēc tam, kad ūdens katlā sāks vārīties? *2 punkti*

Atrisinājums

A1:
Zināms, ka, lai Arhimēda spēks varētu noturēt ķermeni peldot, izspiestā ūdens masai ir jābūt vienādai ar ķermeņa masu. Jebkuram ķermenim peldot, iegrimušās daļas blīvumam ir jābūt mazākam nekā šķidruma blīvumam, jo izspiestā ūdens masai jābūt vienādai ar gan iegrimušās, gan virs ūdens esošās daļas masai. Tā kā ūdens blīvums gan krūzē, gan ārpus ir vienāds, un dzelzs ir blīvāks par ūdeni, var secināt, ka krūzes iegrimušajā daļā ir jābūt gaisam, lai samazinātu kopējo blīvumu. Atbilde: gadījums 3.

A2:
Apskatīsim robežgadījumu, kad krūzes augšējā mala sakrīt ar katla ūdens līmeni. Šajā gadījumā arhimēda spēks ir:

$$F_{Arh} = \rho_u V_k g$$

, kur krūzes tilpums V_k ir:

$$V_k = 0.25\pi D^2 H = 1809.6cm^3$$

Zināms, ka Arhimēda spēks ir vienāds ar krūzes un ielietā ūdens kopējo svaru. Krūzītes sienu tilpumu var aprakstīt kā divu cilindru tilpumu starpību, kur ārējā cilindra dimensijas ir dotas zīmējumā, bet iekšējā cilindra diametrs ir $D - 2t$, bet augstums $H - t$.

$$V_{sienas} = \frac{1}{4}\pi D^2 H - \frac{1}{4}\pi(D-2t)^2(H-t) = 207.1cm^3$$

Dzelzs krūzītes masa ir

$$m_{kr} = V_{sienas} * \rho_{dz} = 1625.3g$$

Tagad var izrēķināt krūzē ielietā ūdens masu:

$$\rho_u V_k g = (m_u + m_{kr})g$$

$$m_u + m_{kr} = V_k \rho_u$$

$$m_u = V_k \rho_u - m_{kr} = 184.3g$$

$$V_u = m_u / rho_u = 184.3cm^3$$

A3:
Jā, eksistē. Krūzes materiālam ir jābūt mazāk blīvam nekā apkārtējam šķidrumam, piemēram, plastmasa.
B1:
Tiklīdz ūdens katlā sāks vārīties, tā temperatūra būs konstanti 100°C. Temperatūra krūzītē arī asimptotiski pietuvosies 100 grādiem, bet, tā kā ūdens krūzē saņem siltumu tikai siltumvadīšanas dēļ caur krūzītes sienām, un šādas siltumvadīšanas jauda ir proporcionāla temperatūru starpībai, ūdens krūzē nesaņem siltumu, lai uzsāktu vārīties. Atbilde: gadījums 3.
B2:
Ūdens temperatūra krūzē būs 100°C.

Demonstrējums: Konfekšu deja 10 punkti

i) Paskaidro, kāpēc iekārtās konfektes svārstās ar dažādām amplitūdām. *3.34 punkti*

ii) Izskaidro fāzes nobīdi vienai no konfektēm. *3.33 punkti*

iii) Kā būtu iespējams noteikt gaisa pretestību konfektei? Pilns risinājums nav nepieciešams. Pieņem, ka svārstību amplitūdu var izteikt kā:

$$A = \frac{K/l}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$$

kur A ir svārstību amplitūda, K ir konstante ar dimensijām m^2/s^2, l ir svārsta garums, ω_0 ir brīvo svārstību frekvence, ω ir pieliktā spēka svārstību frekvence, $\gamma = c/m$, kur c ir gaisa pretestību rakstu-rojošā konstante. *3.33 punkti*

i) Šajā demonstrējumā varam novērot rezonanses fenomenu. Zinām, ka matemātiskā svārsta periods ir

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \propto \sqrt{l}$$

Tātad svārsta pašfrekvence ir proporcionāla $\sqrt{l}$, t.i. konfektēm, kuras iekārtas garākās auklās, ir lielāka pašfrekvence kā konfektēm, kas iekārtas īsākās auklās.

Tagad aplūkosim iekārtā atsvara mijiedarbību ar konfektēm. Tā kā atsvars ir daudz smagāks par konfektēm, tā svārstību frekvence nosaka visas sistēmas svārstību frekvenci. Par atsvara efektu uz konfektēm ērti domāt kā par konfektēm pieliktu spēku, kurš svārstās laikā līdz ar pašu atsvaru. Šis spēks piespiež konfektēm svārstīties ar spēka frekvenci. Tātad, ja konfektes svārstību dabiskā frekvence ir līdzīga spēka frekvencei, spēkam konfektes kustību nav "jālabo" tik daudz kā gadījumā, kad konfektes dabiskā frekvence ir ļoti atšķirīga no spēka frekvences. Šo efektu varam aplūkot starp darbu, ko spēks izdara uz objektu:

$$\delta W = F\delta x$$

kur δx ir pārvietojums spēka virzienā. Ja konfektes pašfrekvence ir tuva spēka frekvencei, tad konfekte arī bez spēka palīdzības kustēsies spēka virzienā, t.i. konfektes kustības virziens tieksies būt tāds pats, kā spēka darbības virziens, un konfekte rezonēs ar spēku. Turpretī, ja konfektes pašfrekvence ļoti atšķiras no spēka frekvences, tad, lai "izlabotu" konfektes kustību, spēkam vairāk jādarbojas pretī konfektes dabiskajai kustībai, tādējādi būs vairāk brīži, kad spēks un konfektes pārvietojums nebūs vienā virzienā.

Tā kā katrai no konfektēm pieliktais spēks svārstās atsvara pašfrekvencē, kas atbilst atsvara svārsta garumam, tad varam secināt, vislielākā svārstību amplitūda būs, kad konfektes auklas garums būs vistuvākais atsvara auklas garumam.

ii) Visvieglāk fāzes nobīdi izskaidrot konfektei, kuras auklas garums ir vistuvākais atsvara auklas garumam.

Ievērosim, ka (i) punktā apspriestais spēks uz konfekti ir vērsts atsvara nobīdes virzienā, t.i., ja atsvars no līdzsvara ir novirzījies $+x$ ass virzienā, tad spēks uz konfekti arī būs $+x$ virzienā attiecībā pret līdzsvara stāvokli.

Spēks, kas tiek pielikts rezonējošajai konfektei, padara maksimālu darbu salīdzinot ar pārējām konfektēm, jo tam jākompensē enerģija, ko rezonējoša konfektē zaudē disipatīvajos spēkos (piemēram, gaisa pretestībā). Tas nozīmē, ka pieliktais spēks vienmēr ir konfektes kustības virzienā. Tā kā konfektes ātrums ir fāzi $\pi/2$ priekšā konfektes nobīdei no līdzsvara stāvokļa (maksimālais ātrums $+x$ virzienā tiek sasniegts pirms tiek sasniegta maksimālā nobīde $+x$ ass virzienā), tad varam secināt, ka pieliktajam spēkam rezonansē arī jābūt fāzi $\pi/2$ priekšā konfektes nobīdei. Bet, tā kā pieliktais spēks ir fāzē ar atsvara nobīdi, tad secinām, ka arī atsvara nobīde ir fāzi $\pi/2$ priekšā rezonējošās konfektes nobīdei. Šo mēs novērojam demonstrējumā - kad atsvars ir sasniedzis maksimālu atvirzi no līdzsvara, konfekte vēl tikai iet caur līdzsvara pozīciju.

iii) Varam ievērot, ka $\omega_0^2 = g/l$, tātad amplitūda A ir atkarīga tikai no K, g, γ, ω un l, turklāt, ja maina tikai svārsta garumu l, turpinot izmantot tās pašas konfektes un to pašu pieliktā spēka avotu (atsvaru ar nemainīgu garumu), tad amplitūda ir atkarīga tikai no svārsta garuma l. Tādējādi, varam iedomāties eksperimentu, kurā maināм svārsta garumu l un mērām svārstību amplitūdu A. Atliek pārveidot doto vienādojumu formā, no kuras iespējams iegūt konstanti γ un tādējādi gaisa pretestību konfektei:

$$\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2 = \left(\frac{K}{Al}\right)^2$$

$$\implies \left(\frac{1}{Al}\right)^2 = \frac{1}{K^2}\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2\gamma^2}{K^2}$$

Esam ieguvuši vienādojumu formā $y = ax + b$, kur $y = 1/(Al)^2$, $a = 1/K^2$, $x = (g/l - \omega^2)^2$ un $b = \omega^2\gamma^2/K^2$. Tā kā g un ω ir zināmas (neatkarīgi izmērāmas) konstantes, tad attēlojot iegūtos l un A datus šādi definētās x un y koordinātēs, varēsim caur datiem izvilkt taisni, no kuras iegūsim slīpuma koeficientu a un konstanti b. No šīm varam iegūt γ, un tādējādi noteikt gaisa pretestību konfektei:

$$\gamma^2 = b\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{b}{a\omega^2}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{b}{a\omega^2}}$$

Eksperiments: Tēju vai kafiju? 35 punkti

Siltumvadīšanas koeficients ir materiālam piemītošs lielums, kas raksturo, cik viegli tam plūst cauri siltums. Piemēram, metālam ir lielāks siltumvadīšanas koeficients kā kokam, tāpēc metāla stabs ziemā šķiet aukstāks nekā blakus esošs koks, kaut gan temperatūras starpība starp roku un metālu ir tāda pati kā starp roku un koku. Šajā uzdevumā centīsimies atrast siltumvadīšanas koeficientu keramikai.

Jauda P, kas plūst cauri krūzītes sienai, ir atkarīga no tās virsmas laukuma S, siltumvadīšanas koeficienta k, temperatūras starpības starp iekšējo un ārējo virsmu ΔT un krūzītes biezuma l:

$$P = \frac{kS}{l}\Delta T$$

Zināms arī, ka, ja objekta no materiāla ar siltumvadīšanas koeficientu c un masu m temperatūra mainās par ΔT, tad tam ticis pievadīts siltums Q, izsakāms kā

$$Q = cm\Delta T$$

Vienkāršības labad vari pieņemt, ka krūzītes siltumietilpība ir nulle. Ūdens siltumietilpība ir 4.2 J g^{-1} K^{-1}.

Ieteikums 1: Pievērs īpašu uzmanību, kas katrā vienādojumā ir ΔT.

Pirmajā formulā temperatūras starpība ir starp krūzītes iekšpusi un ārpusi ($\Delta T_{\text{iekš/ārpus}}$). Otrajā formulā temperatūras starpība ir ūdenī starp mērījumiem (ΔT_{t}).

Ieteikums 2: Standarta metode ir attēlot taisnes funkciju $y = ax + b$. No šīs funkcijas var nolasīt tās slīpumu a. Atliek izdomāt, kam jābūt y un x vietā, lai izveidotos lineāra sakarība.

Dots (pārbaudi, ka viss šeit uzskaitītais ir izsniegts!): lineāls, hronometrs, termometrs, krūzīte, spainis ar 3l auksta ūdens, karstais ūdens (pieejams koridorī pie tējkannas, **tējkannu pēc tam atnest atpakaļ!**), statīvs, putuplasts.

i) Veic mērījumus un izrēķini krūzītes ārējās virsmas laukumu, sienas biezumu un tilpumu. Novērtē arī kļūdas savos mērījumos un rezultātos! *3 punkti*

Laukums: Mērķis ir noteikt virsmas laukumu caur kuru siltums plūdīs prom no krūzītes. Lielākā kļūda ir lineāla kļūda (1mm). Principā šo teoriju var pielietot tikai plāksnei ar vienādu biezumu, krūzītes liekums, osiņa, malas, apakšējā kante ir novirze no šīs teorijas. Šīs kļūdas lielumu var novērtēt rēķinot starpību starp iekšējo laukumu un ārējo laukumu, kur pareizā atbilde būtu kaut kur pa vidu un kļūdu raksturotu laukumu starpība.

$$h = (9.5 \pm 0.1)cm$$
$$d = (8.1 \pm 0.1)cm$$
$$S = d\pi h + \frac{1}{4}\pi d^2 = 293.3cm^2$$

Ir pāris veidi, kā varējāt novērtēt kļūdu, tomēr tas nebija jāizdara precīzi pamatskolas līmenim. Kļūdu laukumam varēja novērtēt relatīvi, varēja arī saskaitīt relatīvās kļūdas no visiem mērījumiem, vai apskatīt starpību starp iekšējo un ārējo krūzītes laukumu. Atkarīgs no metodes, kļūda ir 1-5%.

$$r = 0.1/8.1 = 1.2\%$$

$$S = 293.3 \pm 1.2\% = (293.3 \pm 3.6)cm^2$$

$$V = h\pi d^2/4 = (489.5 \pm 5.9)cm^3$$
$$m = V\rho = 489.5 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 = (0.4895 \pm 0.0059)kg$$

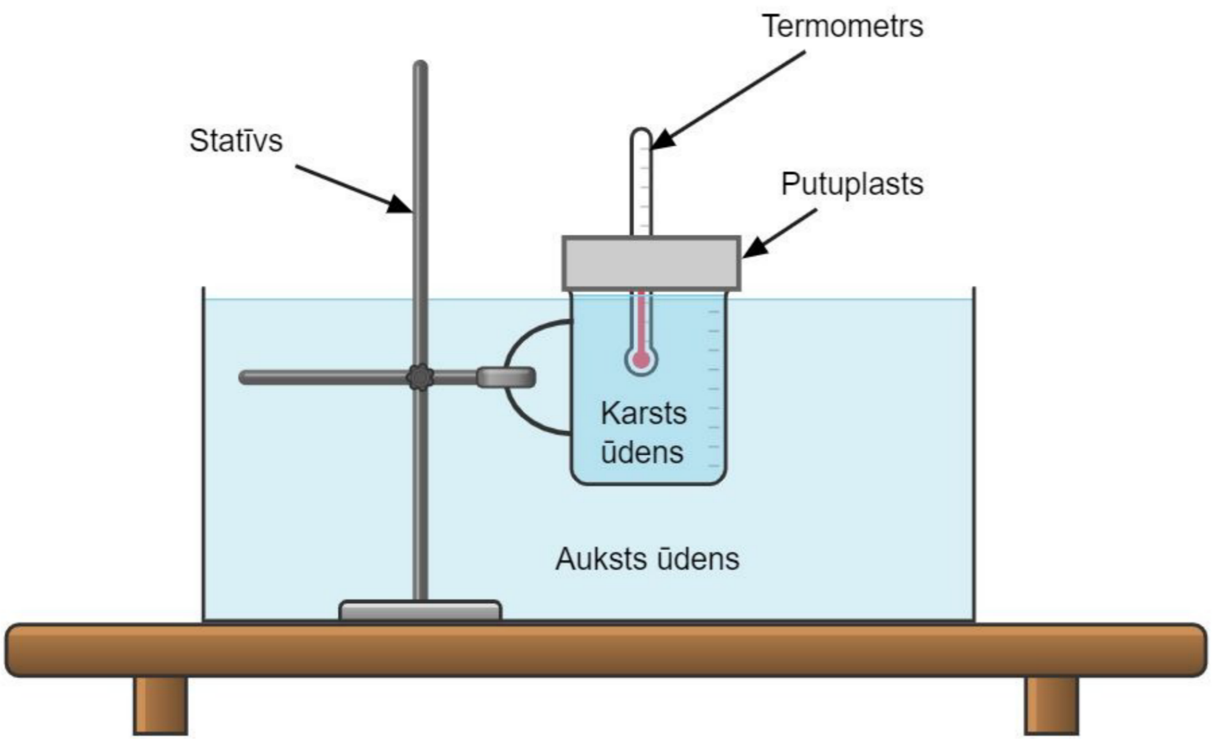
Krūzītes biezumu varēja mērīt nomērot biezumu vai iekšējo un ārējo diametru un starpību izdalot ar divi

$$l = 0.30 \pm 0.05cm$$

ii) Krūzītes osiņu varat neņemt vērā. Kā tas ietekmē rezultātus? *1 punkti*

Osiņa ir papildus materiāls, kas izolē karsto ūdeni, tāpēc laukums caur kuru var plūst siltums būtu mazāks. Rezultātā izrēķinātais koeficients k būs pārvērtēts. Osiņas šķērsgriezuma laukums ir relatīvi mazs salīdzinot ar laukumu S, tāpēc ietekme ir salīdzinoši maza.

iii) Izplāno eksperimentu krūzītes siltumvadīšanas koeficienta noteikšanai. Pieraksti galvenos eksperimenta soļus, izveido un anotē eksperimentālās iekārtas skici, kā arī īsumā parādi, kā no mērījumiem iegūsi siltumvadīšanas koeficientu. *10 punkti*



Darba gaita:

1. Veikt ūdens temperatūras mērījumu traukā
2. Piepildīt krūzi ar verdošu ūdeni un sagatavot eksperimentu pēc augstāk norādītās bildes.
3. Veikt mērījumus karstā ūdens temperatūras mērījumus katras 15 sekundes.

4. Fiksē mērījumus tabulā

5. analizēt datus, attēlot grafikos, izteikt secinājumus.

$\Delta T_{\text{iekš/ārpus}}$ ir temperatūras starpība ir starp krūzītes iekšpusi un ārpusi. ΔT_{t} ir temperatūras starpība krūzes ūdenī starp mērījumiem.

$$P = \frac{kS}{l}\Delta T_{\text{iekš/ārpus}}$$

$$P = cm\frac{\Delta T_{\text{t}}}{\Delta t}$$

$$\frac{kS}{l}\Delta T_{\text{iekš/ārpus}} = cm\frac{\Delta T_{\text{t}}}{\Delta t}$$

$$\Delta T_{\text{iekš/ārpus}} = \frac{lcm}{kS}\frac{\Delta T_{\text{t}}}{\Delta t}$$

Grafiski attēlojot $\Delta T_{\text{iekš/ārpus}}$ pret $\frac{\Delta T_{\text{t}}}{\Delta t}$ iegūsiet taisni y=ax+b, kur $y = \Delta T_{\text{iekš/ārpus}}$, $x = \frac{\Delta T_{\text{t}}}{\Delta t}$ un $a = \frac{lcm}{kS}$. a var nolasīt no grafika un izteikt k, $k = \frac{lcm}{aS}$.

Alternatīvi iespējams aprēķināt koeficientu k starp katriem diviem blakus esošiem punktiem un paņemt vidējo vērtību, tomēr šī metode ir neprecīzāka.

$$k = \frac{lcm}{S\Delta T_{\text{iekš/ārpus}}}\frac{\Delta T_{\text{t}}}{\Delta t}$$

Piezīme: Šeit tiek pieņemts nemainīga siltuma jauda starp mērījumiem, kas padarītu rezultātu neprecīzāku. Uzdevuma pareizais risinājums, par ko var iegūt pilnus punktus ir bez šī pieņēmuma. Metode bez šī pieņēmuma prasa matemātiskās analīzes zināšanas, tāpēc par neprecīzākiem risinājumiem iespējams dabūt nepilnus punktus.

$$P = \frac{kS}{l}\Delta T_{\text{iekš/ārpus}}$$

$$P = cm\frac{dT_{\text{t}}}{dt}$$

$$\frac{kS}{l}\Delta T_{\text{iekš/ārpus}} = cm\frac{dT_{\text{t}}}{dt}$$

$$\frac{dT_{\text{t}}}{T_{\text{iekš/ārpus}}} = \frac{kS}{lcm}dt$$

$$\int_{T_{\text{iekš/ārpus,sākumā}}}^{T_{\text{iekš/ārpus}}} \frac{1}{T_{\text{iekš/ārpus}}}\,dT_{\text{iekš/ārpus}} = \int_0^t \frac{kS}{lcm}\,dt$$

$$ln(\frac{T_{\text{iekš/ārpus,sākumā}}}{T_{\text{iekš/ārpus}}}) = \frac{kSt}{lcm}$$

Grafiski attēlojot $ln(\frac{T_{\text{iekš/ārpus,sākumā}}}{T_{\text{iekš/ārpus}}})$ pret t iegūsiet taisni y=ax+b, kur $y = ln(\frac{T_{\text{iekš/ārpus,sākumā}}}{T_{\text{iekš/ārpus}}})$, $x = t$ un $a = \frac{kS}{lcm}$. a var nolasīt no grafika un izteikt k, $k = \frac{lcma}{S}$.

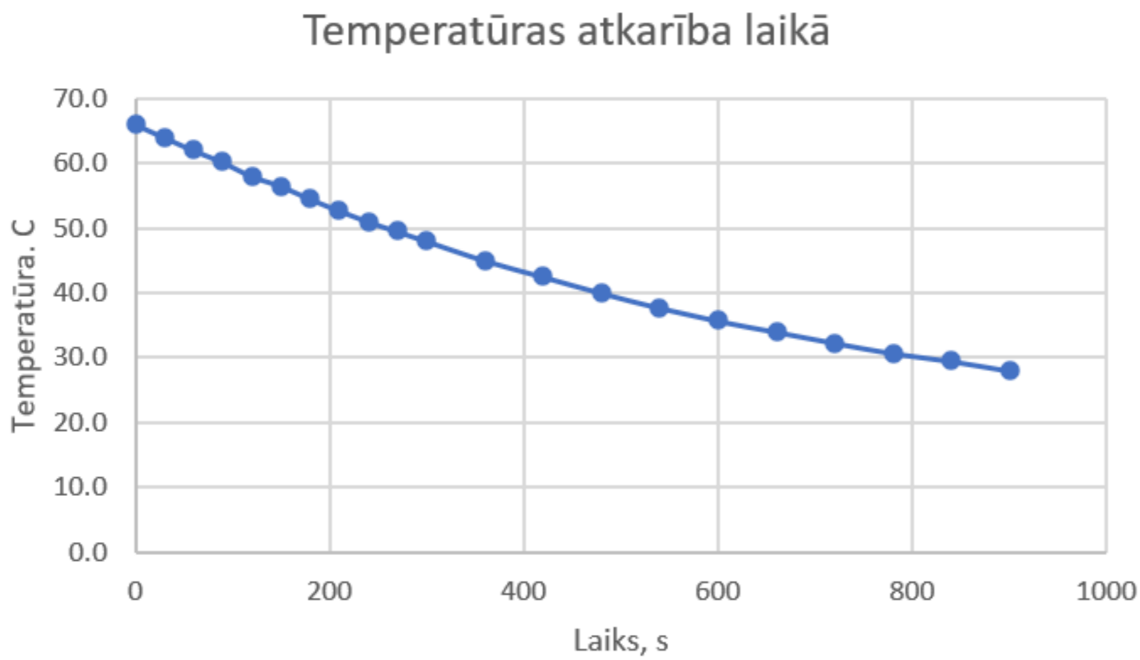
Šis risinājuma veids vēl joprojām neņem vērā, ka temperatūra ārējā traukā mainās, tomēr grafiski attēlojot redzams, ka šī ietekme ir maza.

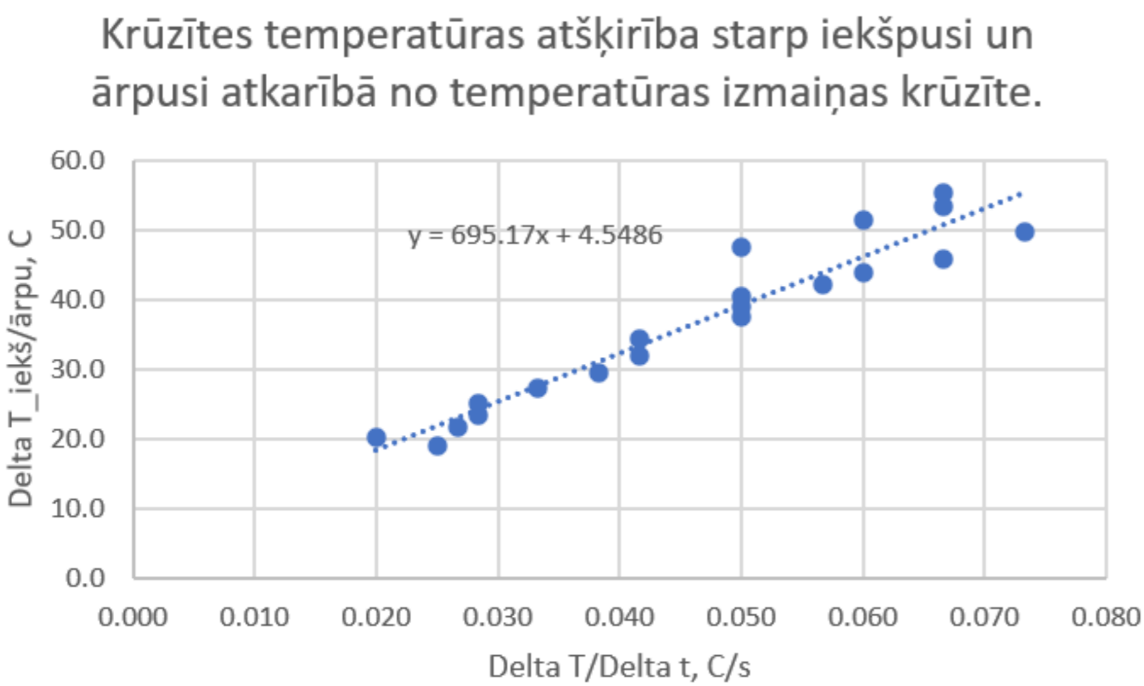
iv) Veic eksperimentu un piefiksē mērījumus. Parasti olimpiādēs sagaida vismaz 15 mērījumus. *5 punkti*

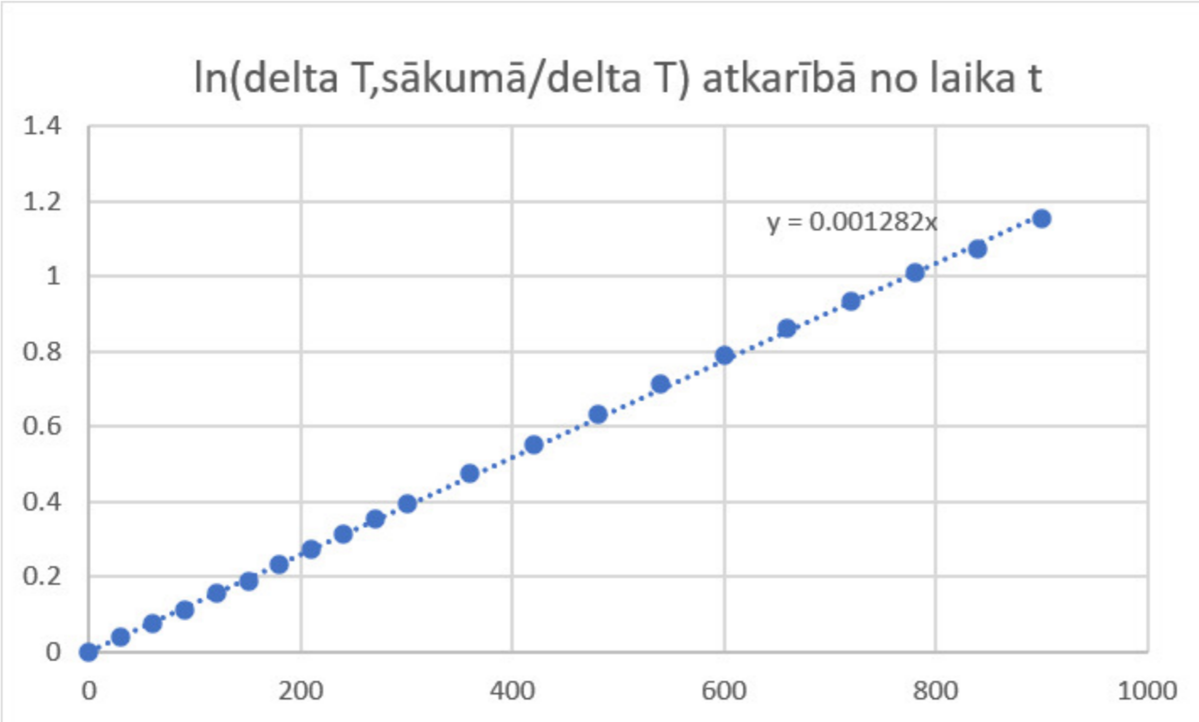
1. tabula: Mērijumu tabla

N.p.k.	t,s	T_{karsts}, C	T_{auksts}, C	Δ $T_{iekš/ārpu}$, C	Δ T/Δ t, C/s	k, W/m/K	$ln(\frac{T_{\text{iekš/ārpus,sākumā}}}{T_{\text{iekš/ārpus}}})$
1	0	66.0	10.5	55.5	0.067	0.252	0
2	30	64.0	10.5	53.5	0.067	0.261	0.036701367
3	60	62.0	10.5	51.5	0.060	0.244	0.074801213
4	90	60.2	10.5	49.7	0.073	0.310	0.110378088
5	120	58.0	10.5	47.5	0.050	0.221	0.15565331
6	150	56.5	10.5	46.0	0.067	0.304	0.187741624
7	180	54.5	10.5	44.0	0.060	0.286	0.232193387
8	210	52.7	10.5	42.2	0.057	0.282	0.2739628
9	240	51.0	10.5	40.5	0.050	0.259	0.315081047
10	270	49.5	10.5	39.0	0.050	0.269	0.352821375
11	300	48.0	10.5	37.5	0.050	0.280	0.392042088
12	360	45.0	10.5	34.5	0.042	0.253	0.475423697
13	420	42.5	10.5	32.0	0.042	0.273	0.550647118
14	480	40.0	10.5	29.5	0.038	0.273	0.631992757
15	540	37.7	10.5	27.2	0.033	0.257	0.713166047
16	600	35.7	10.5	25.2	0.028	0.236	0.789539026
17	660	34.0	10.5	23.5	0.028	0.253	0.8593826
18	720	32.3	10.5	21.8	0.027	0.257	0.934473051
19	780	30.7	10.5	20.2	0.020	0.208	1.010700416
20	840	29.5	10.5	19.0	0.025	0.276	1.071944042
21	900	28.0	10.5	17.5			1.15418214

v) Grafiski attēlo, kā laikā mainās temperatūras starpība starp ūdeni krūzītē un ūdeni spainī. *3 punkti*


Temperatūras atkarība laikā
Temperatūra. C
70.0
60.0
50.0
40.0
30.0
20.0
10.0
0.0
0
200
400
600
800
1000
Laiks, s


Krūzītes temperatūras atšķirība starp iekšpusi un ārpusi atkarībā no temperatūras izmaiņas krūzīte.
y = 695.17x + 4.5486
Delta T_iekš/ārpu, C
60.0
50.0
40.0
30.0
20.0
10.0
0.0
0.000
0.010
0.020
0.030
0.040
0.050
0.060
0.070
0.080
Delta T/Delta t, C/s



vi) Nosaki krūzītes materiāla siltumvadīšanas koeficientu. *7 punkti*

Piezīme: Pārliecinieties, ka vienādojumos izmantojat si sistēmas mērvienības izmantojot formulas. Izņēmums celsija grādus varēja varēja nepārveidot par kelviniem, jo tika apspriesta tikai temperatūras starpība, kas ir vienāda Celsijos un Kelvinos.

(Metode 1)Nolasot no grafika $a = 695$

$$k = \frac{lcm}{Sa} = \frac{0.003 \cdot 0.4895 \cdot 4190}{0.02933 \cdot 695} = 0.3018 W/m/K$$

(Metode 2) Izrēķinot vidējo no katriem diviem mērījumiem (skat. tabulu)

$$k = 0.2626 W/m/K$$

(Metode 3) Nolasot no grafika $a = 0.001282$

$$k = \frac{lcma}{S} = \frac{0.003 \cdot 0.4895 \cdot 4190 \cdot 0.001282}{0.02933} = 0.2689 W/m/K$$

vii) Kuri no eksperimentā izdarītajiem pieņēmumiem varētu būt visvairāk samazinājuši rezultāta precizitāti? Kā būtu jāmaina eksperiments, lai ņemtu šos vērā? *6 punkti*

Neprecizitātes minētas risinājumā, Papildus neprecizitātes: instrumentu kļūda, izolācija no plutuplasta, formas neprecizitātes no krūzītes

Secinājumi:

1. Lielākā neprecizitāte nāk no krūzītes biezuma mērīšanas (relatīvā kļūda 25%), visvairāk rezultāta precizitāti var uzlabot lietojot bīdmēru vai mikrometru lineāla vietā. Rezultāta kļūda varētu būt ap 30%

2. Temperatūras starpībai starp krūzītes sienu krītoties, ūdens krūzīte atdziest arvien lēnāk

3. Tika noteikts keramikas siltumvadīšanas koeficents $k = 0.2689W/m/K$